

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο S σε ένα γραμμικό χώρο, αν για $S_1, S_2 \in S$ συνεπαχεται ότι: $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 \in S$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ (το $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ είναι κυρτός συνδυασμός) τότε το S κυρτό

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το σύνολο W^* όλων των βέλτιστων προσεγγίσεων του $v \in V$ στον χώρο W , είναι κυρτό στον W

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Εστω $w_1^*, w_2^* \in W^*$ βέλτιστες προσεγγίσεις του v

$$\|v - w_1^*\| = \|v - w_2^*\| \quad \text{Εστω } w^* = \lambda_1 w_1^* + \lambda_2 w_2^*, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$\text{Ετσι, } \|v - w^*\| = \|v - (\lambda_1 w_1^* + \lambda_2 w_2^*)\| = \|\lambda_1 (v - w_1^*) + \lambda_2 (v - w_2^*)\| \leq$$

$$\leq |\lambda_1| \|v - w_1^*\| + |\lambda_2| \|v - w_2^*\| = \lambda_1 \cdot \rho + \lambda_2 \cdot \rho = (\lambda_1 + \lambda_2) \rho = \rho$$

Δεν μπορεί όμως το $\|v - w^*\| < \rho$

Αρα $\|v - w^*\| = \rho \Rightarrow w^* \in W^*$ (w^* βέλτιστη προσέγγιση)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια νόρμα $\|\cdot\|$ λέγεται αντισφαιρικά κυρτή στο σύνολο

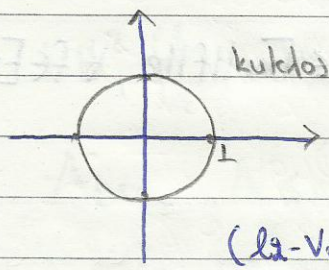
$B = \{v : \|v\| \leq 1\}$ (μοναδιαία σφαίρα), αν για v_1, v_2 τέω

$v_1 \neq v_2$ και $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ έχουμε

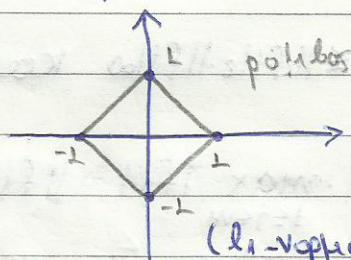
$$\|\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\| < 1 \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0 \text{ με } \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

Παρατήρηση: Αν $V = C[a, b]$ τότε $\|v\|_p = \left(\int_a^b |v(x)|^p dx \right)^{1/p}$ είναι αντισφαιρικά κυρτή $\forall p \geq 1$, ενώ οι $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι αντισφαιρικά κυρτές. Το ίδιο ισχύει για $V = \mathbb{R}^n$

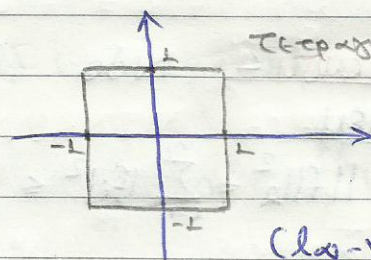
• Για $v \in \mathbb{R}^2$ με $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ τότε $\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$



(ℓ_2 -νόρμα)



(ℓ_1 -νόρμα)



(ℓ_∞ -νόρμα)

• Για των ℓ_1 νόρμα $\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| = 1$

• Για των ℓ_∞ νόρμα $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω V γραμμικός χώρος εξοπλισμένος με μια ανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$. Τότε υπάρχει το πολύ μια βέλτιστη προσέγγιση του στοιχείου $v \in V$ στον υπόχωρο W .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το σύνολο των προσεγγίσεων είναι κυρτό στο W .

Έστω ότι υπάρχουν δύο προσεγγίσεις (βέλτιστες) του V

στον W , $w_1^*, w_2^* : \|v - w_1^*\| = \|v - w_2^*\| = \rho$ τότε

και $w^* = (w_1^* + w_2^*)/2$. Θα είναι βέλτιστη προσέγγιση

θεωρούμε $v_1 = (v - w_1^*)/\rho$ και $v_2 = (v - w_2^*)/\rho$ τότε $v_1 \neq v_2$

και $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ (είναι στο σφαίρα της σφαίρας)

$$\left\| \frac{v_1 + v_2}{2} \right\| = \left\| \frac{v - w_1^*}{2\rho} + \frac{v - w_2^*}{2\rho} \right\| = \frac{1}{\rho} \left\| v - \frac{w_1^* + w_2^*}{2} \right\| = \frac{1}{\rho} \|v - w^*\| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|v - w^*\| < \rho \quad (\text{ζ})$$

Πόρισμα: Έστω V γραμμικός χώρος εξοπλισμένος με μια ανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$ και W ένας υπόχωρος του V πεπεραδιστάς. Τότε, για κάθε $v \in V$, υπάρχει μοναδικό w^* τέτοιο $\|v - w^*\| < \|v - w\|$, $\forall w \in W$ με $w \neq w^*$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) Έστω $V = C([0,1])$ εξοπλισμένος με την ℓ_1 -νόρμα

Ας είναι τώρα $v_1 = 2x$ και $v_2 = 2(1-x)$ τότε $v_1 \neq v_2$

και $\|v_1\|_1 = \|v_2\|_1 = 1$.

$$\|v_1\|_1 = \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1, \quad \|v_2\|_1 = \int_0^1 2(1-x) dx = [2x - x^2]_0^1 = 1$$

$$\text{Έστω } v = \frac{v_1 + v_2}{2} = 1$$

$$\text{Τότε, } \|v\|_1 = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 \Rightarrow \text{Η } \ell_1\text{-νόρμα μὴ κυρτή}$$

2) Έστω $V = C([0,1])$ εξοπλισμένος με την ℓ_∞ -νόρμα

Ας είναι $v_1 = x$ και $v_2 = 2x - 1$, τότε $v_1 \neq v_2$ και

$$\|v_1\|_\infty = \|v_2\|_\infty = 1$$

$$\text{Έστω } v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{3x - 1}{2} \text{ τότε } \|v\|_\infty = 1 \Rightarrow \text{Η } \ell_\infty\text{-νόρμα μὴ κυρτή}$$

3) Έστω $V = E_m$ εφοδιασμένος με την l_∞ -νόρμα

Έστω $V_1 = (1, 1, \dots, 1)^T$ και $V_2 = (1, 1 - \frac{1}{m}, 1 - \frac{2}{m}, \dots, \frac{1}{m})^T$

$V_1 \neq V_2$ και $\|V_1\|_\infty = \|V_2\|_\infty = 1$

Έστω $V = \frac{V_1 + V_2}{2} = (1, 1 - \frac{1}{2m}, 1 - \frac{1}{m}, 1 - \frac{3}{2m}, \dots, \frac{m+1}{2m})^T$

Τότε $\|V\|_\infty = 1$

Άσκηση

Να βρεθεί το σωστό όριο των βέλτιστων λύσεων του σημείου $(1, 1, 1)^T \in \mathbb{R}^3$ στο χώρο $\mathbb{R}^2 = (x, y, 0)^T$ με $x, y \in \mathbb{R}$, θεωρώντας τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$.

Λύση

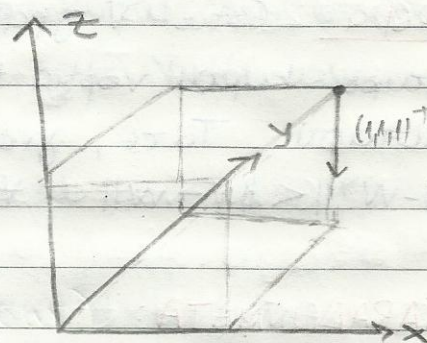
Έστω $w^* = (a, b, 0)$ η βέλτιστη προσέγγιση του

$V = (1, 1, 1)^T$, τότε $V - w^* = (1-a, 1-b, 1)^T$

$$\min_{w \in \mathbb{R}^2} (\max \{|1-a|, |1-b|, 1\}) = 1 \Rightarrow \|V - w^*\|_\infty = 1$$

$$|1-a| \leq 1 \Leftrightarrow a \in [0, 2]$$

$$|1-b| \leq 1 \Leftrightarrow b \in [0, 2]$$



• Βέλτιστη Ομοιομορφη Προσέγγιση •

Έστω $V = C[a, b]$ εφοδιασμένος με την $\|\cdot\|_\infty$ και $W = P_n$ (χώρος πολυωνύμων) το ποιο n -βάθιο.

• Το πρόβλημα: (Σωστός)

Να βρεθεί $P_n^* \in P_n$ δοσίου $f \in C[a, b]$ ε/ω νόρμα $\|f - P_n^*\| \leq \|f - p\|, \forall p \in P_n$

• Το πρόβλημα: (Διαμετρώ)

για $V = E_m, W = P_n$ με $\|\cdot\|_\infty$. Δοσίου $f \in E_m$ να βρεθεί $P_n^* \in P_n$ τω :

$$\|f - P_n^*\| \leq \|f - p\|, \forall p \in P_n$$

Ή όλο το υπέρτατο $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|$ για Ευκλείδη

ΘΕΩΡΗΜΑ (Weierstrass)

Δοθέντος $f \in C[a, b]$ και $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει πολώνυμο P τέτοιο ώστε $\|f - P\| \leq \varepsilon$

Μετασχηματίζουμε το $C[a, b]$ στον $C[0, 1]$ με τον γραμμικό μετασχηματισμό $x = (b-a)t + a$.

Ορίζουμε τα πολώνυμα Bernstein: $h \in C[0, 1]$
το πολώνυμο Bernstein που ορίζεται να είναι $B_m(h; t) \rightarrow$ [ορίζεται από την h με μεταβλητή t]
ώστε:

$$B_m(h; t) = \sum_{k=0}^m h\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k}$$

Όπου η h παίρνεται σε μια ομοιομορφή διαμέριση του $[0, 1]$

Χαρακτηρισμός της Βέλτιστης ομοιομορφής Προσέγγισης:

Έστω $f \in C[a, b]$ ψάχνω $P_n^* \in P_n$ τω:

$$\|f - P_n^*\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n^*(x)| = E_n(f; [a, b]) \leq \|f - p\| =$$

$$= \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|, \forall p \in P_n$$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω $f \in C[a, b]$ και P_n^* η β.ο.π της f στον P_n

τότε υπάρχουν σημεία $x_1, x_2 \in [a, b]$ τω:

$$|f(x_1) - P_n^*(x_1)| = |f(x_2) - P_n^*(x_2)| = \|f - P_n^*\| = E_n(f)$$

$$\text{και } f(x_1) - P_n^*(x_1) = -(f(x_2) - P_n^*(x_2))$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

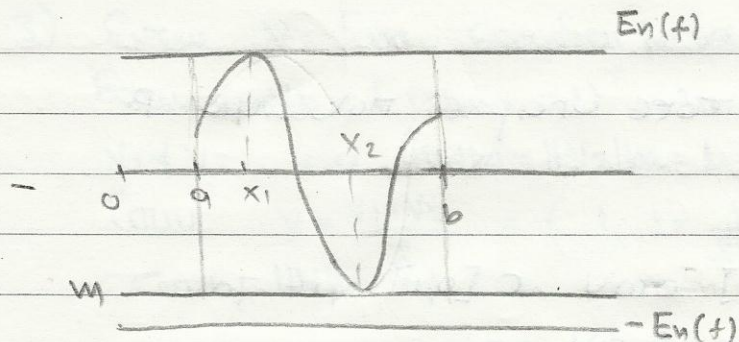
Έστω $e(x) = f(x) - P_n^*(x)$ τότε $-E_n(f) \leq e(x) \leq E_n(f)$

Έστω ότι δεν ισχύει η πρόταση, και δίκως βάζω

ως υποθέσουμε ένα x_1 τέτοιο ώστε $f(x_1) - P_n^*(x_1) = E_n(f)$

$$\text{και } \min_{x \in [a, b]} e(x) = e(x_2) = f(x_2) - P_n^*(x_2) = m > -E_n(f)$$

Ισηματακά είναι:



Θεωρώ λοιπόν

$$c = \frac{En(f) + m}{2} \quad \text{και}$$

το πολυώνυμο q_n
 τέτοιο ώστε $q_n = p_n^* + c$

$$\text{και } f - q_n = f - p_n^* - c = e(x) - c$$

Ετσι :

$$m - e(x) < f(x) - q_n^*(x) \leq En(f) - c$$

$$\text{Ετσι, εξ ορισμού } m = -En(f) + 2c$$

Δηλ

$$En(f) - 2c - e(x) < f(x) - q_n^*(x) \leq En(f) - c$$

$$\|f - q_n^*\| = En(f) - c < En(f) \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

Δηλ υπάρχει μια καλύτερη προσέγγιση.

Αρα, πάντα θα υπάρχει δυο συστήματα